

Cap 3 - Cinemática de Rotação

3.1. Transformações ortogonais

Σ : sistema cartesiano inercial, eixos $\hat{e}_i$; words x_i

Σ' : sistema cartesiano em rotação, " $\hat{e}'_i$; " x'_i

obs: Nivaldo $\bar{n}$ diz explicitamente, mas assumimos Σ, Σ' com origem comum

$$\text{Dado qq vetor } \vec{g} = \sum_i g_i \hat{e}_i = \sum_j g'_j \hat{e}'_j$$

$$g'_i = \hat{e}'_i \cdot \vec{g} = \sum_j a_{ij} g_j, \quad a_{ij} = \hat{e}'_i \cdot \hat{e}_j = \cos. \text{ do ângulo entre } \hat{e}'_i \text{ e } \hat{e}_j.$$

(matriz de mud. de base formada por "cossenos diretores")

Intuitivamente: bastam 3 nos indeps p/ definir orientação relativa (2 determinam eixo $\hat{e}'_3$; mais 1 (rotação ao redor de $\hat{e}'_3$) determinam os outros 2) $\Rightarrow$ os 9 a_{ij} 's $\bar{n}$ são indeps.

Restrição: a transformação linear tem de preservar os módulos:

$$\vec{g} \cdot \vec{g} = \sum_j g_j^2 = \sum_i g_i'^2 = \sum_{i,j,k} (a_{ij} g_j) (a_{ik} g_k) = \sum_{k,j} \underbrace{\left(\sum_i a_{ij} a_{ik} \right)}_{= \delta_{jk}} g_j g_k$$

$\sum_i a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$

 (6 eqs)

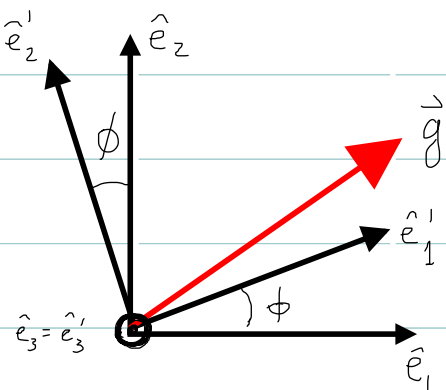
Em forma matricial : def $A \equiv (a_{ij})$

$$\boxed{\vec{g}_{\mathcal{E}'} = A \vec{g}_{\mathcal{E}}} \quad \text{e} \quad \sum_i A_{ij} A_{ik} = \sum_i A_{ki}^T A_{ij} = \delta_{jk} \rightarrow \boxed{A^T A = I} \\ \rightarrow \boxed{A^T = A^{-1}}$$

obs (exercício): $AA^T = I$ tb vale

obs: matrizes satisfazendo $AA^T = I$ ($\Leftrightarrow A^T A = I$) são ditas ortogonais

Ex: rotação de ϕ dos eixos no sentido anti-horário ao redor do eixo $\hat{z}$



$$\hat{e}_1 = \cos \phi \hat{e}_1' - \sin \phi \hat{e}_2' + 0 \hat{e}_3'$$

$$\hat{e}_2 = \sin \phi \hat{e}_1' + \cos \phi \hat{e}_2' + 0 \hat{e}_3'$$

$$\hat{e}_3 = 0 \hat{e}_1' + 0 \hat{e}_2' + \hat{e}_3'$$

$$A(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \hat{e}_1' \cdot \hat{e}_2 = \cos(90 - \phi) = \sin \phi$$

$$A_{21} = \hat{e}_2' \cdot \hat{e}_1 = \cos(90 + \phi) = -\sin \phi$$

colunas de A = novas coordenadas de $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$

$$\text{Note que } A(-\phi) = [A(\phi)]^{-1} = [A(\phi)]^T$$

Obs: interpretações ativa e passiva

Sempre que falamos de rotações (e, mais geralmente, de qualquer operação geométrica sobre um sistema físico), sempre podemos interpretar a transformação representada pela matriz A_{ij} de duas formas complementares. Até agora assumimos a:

Interpretação passiva: A rotação atua sobre os eixos. Dado um vetor $\vec{g} = \sum g_i \hat{e}_i$, o conjunto de coordenadas $\begin{bmatrix} g'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_j \end{bmatrix}$ representa o mesmo $\vec{g}$, mas c/ respeito aos novos eixos Σ' . Usaremos às vezes a notação $\vec{g}_{\Sigma'} = A \vec{g}_{\Sigma}$ para deixar isso explícito.

Alternativamente:

Interpretação ativa: A rotação atua sobre os vetores. Dado $\vec{g} = \sum g_i \hat{e}_i$, o conjunto de coordenadas $\begin{bmatrix} g'_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_j \end{bmatrix}$ representa um novo vetor $\vec{g}' = \sum g'_i \hat{e}_i$ com respeito ao mesmo sistema de eixos Σ .

Grupo ortogonal

Quando duas rotações A, B são feitas em sequência, as coords. se transformam de acordo com

$$\vec{g}_{\Sigma''} = B \vec{g}_{\Sigma'} = B(A \vec{g}_{\Sigma}) = (BA) \vec{g}_{\Sigma} \equiv C \vec{g}_{\Sigma}$$

Podemos checar que C é ortogonal: $C^T C = \cancel{A^T B^T} BA = I$

Assim, o conjunto G de matrizes ortogonais tem as propriedades

- i) Se $A, B \in G$, $AB \in G$ (G é fechado c/ respeito ao produto)
- ii) Se $A, B, C \in G$: $(AB)C = A(BC)$ (produto associativo)
- iii) $\exists I \in G$ t.q. $A \cdot I = I \cdot A = A$ (elem. identidade)
- iv) Dado $A \in G$, $\exists$ um único ^{inverso} $B \in G$ t.q. $AB = BA = I$ ($B = A^{-1}$)

Dem de (iv): sabemos que $\exists A^T$ t.q. $AA^T = A^T A = I$. A^T é ortogonal

já que $(A^T)(A^T)^T = A^T A = I = (A^T)^T A^T = AA^T$. Ainda, n. pode haver outra inversa, pois se $AB = I$ então $A(B - A^T) = 0 \rightarrow B - A^T = 0$ (multip. por A^T)

Todo conjunto G com uma operação "produto" satisfazendo i-iv é chamado "grupo"

O "grupo de transfr. ortogonais em $\mathbb{R}^3$ " chama-se $O(3)$

Na verdade $O(3)$ não inclui apenas rotações, mas também operações como

$$R_z = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \text{ (reflexão c/ respeito ao plano } xy \text{)}$$

$$\text{e } R_x R_y R_z = -I = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \text{ (inversão)}$$

operações como essas mudam a orientação dos eixos.

$$\text{Observe agora que, } \forall A \in O(3) : \det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det^2 A = \det I = 1 \\ \rightarrow \det A = \pm 1$$

$$\text{Nos casos em que } \det A = -1, \text{ então } \det(-A) = \det(-I)\det(A) = 1$$

$$\therefore A = -I(-A) \equiv -IB, \text{ onde } B \text{ tem } \det = 1$$

As transfs ortogonais com $\det = +1$ são chamadas "próprias" e constituem um subgrupo de $O(3)$, chamado $SO(3)$. (lembando:

$$\text{Dados } A, B, C \in SO(3)$$

$$i) \det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \rightarrow AB \in SO(3)$$

ii) verdade por default

$$iii) I \in SO(3)$$

$$iv) \det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1 \rightarrow A^{-1} \in SO(3)$$

Intuitivamente, podemos ver que toda rotação $\in SO(3)$. É só notar que toda rotação pode ser continuamente deformada até se igualar a I . Como $\det$ é uma função contínua, portanto ã pode saltar de $+1$ p/ -1 , todas as rotações têm $\det = 1$.

Teorema: toda transf. ortogonal ^{própria} pode ser interpretada como uma rotação ao redor de um único eixo fixo. (i.e., $\exists \hat{n}$ tal que $A\hat{n} = \hat{n}$)

dem: dado qq A , $A - I = A - AA^T = A(I - A^T) = -A(A - I)^T$

$$\therefore \det(A - I) = -\det(A) \det(A - I) = -\det(A - I) \implies \det(A - I) = 0$$

$\therefore A - I$ (que é diagonalizável) possui autovetor 0

$$\therefore A \text{ possui autovetor } \lambda = 1 \rightarrow \exists \hat{n} \neq 0 \text{ c/ } A\hat{n} = \hat{n}$$

obs: argumento ss funciona devido à dim ímpar do espaço ($\rightarrow \det(-A) = -\det A$)

Escolhendo um sistema de eixos no qual $\hat{n} = \hat{e}_3$, vemos então que a matriz A tem a forma geral

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ onde } B^T B = I, \det B = 1 \text{ (i.e., } B \in SO(2))$$

Por fim, podemos ver que qualquer $B \in SO(2)$ tem a forma $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$:

$$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : B^T B = I \rightarrow a^2 + c^2 = 1, b^2 + d^2 = 1, ac + bd = 0$$

$$\det B = 1 \rightarrow ad - bc = 1$$

Como $\begin{cases} b^2 + d^2 = 1 \\ a^2 + c^2 = 1 \end{cases}$: sempre podemos encontrar $0 \leq \theta, \gamma < 2\pi$ tais que $b = \sin \theta, d = \cos \theta$
 $a = \cos \gamma, c = -\sin \gamma$



$$ad - bc = 1 \rightarrow \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma = \cos(\theta - \gamma) = 1 \rightarrow \theta - \gamma = 0 \rightarrow \boxed{\theta = \gamma}$$

(obs: a última eq., $bd + ac = 0$, é redundante nesse caso)

Podemos concluir que todo mov. de um corpo rígido com 1 pto fixo é uma rotação de um ângulo θ ao redor de um eixo fixo passando por esse ponto.

obs 1: esse teorema nos diz que o eixo $\hat{n}$ e o ângulo θ existem, mas não dá uma receita explícita para encontrá-los para um A dado!

obs 2:

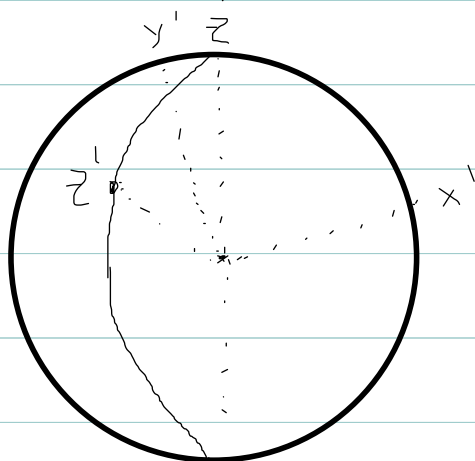
(mas sem demonstrar)
Nivaldo menciona ainda uma generalização, teorema de Chasles, segundo o qual qualquer movto. de um corpo rígido em 3D se reduz a uma translação seguida de uma rotação ao redor de um eixo paralelo ao da translação.

Ângulos de Euler

É conveniente parametrizar as rotações usando o n° mínimo possível (3) de parâmetros independentes. Em particular, é útil descrever uma rotação arbitrária em termos de três rotações simples sucessivas. Um dos métodos mais conhecidos de se fazer isso é através dos ângulos de Euler. Nesse caso, passamos do ref. original $\Sigma(x, y, z)$ para o final $\Sigma'(x', y', z')$ através de 2 refs intermediárias:

- i) Rotação D de ϕ ao redor do eixo $\hat{z} \Rightarrow$ novo ref $\tilde{\Sigma}$ com coords $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}=z)$
- ii) " C " θ ao redor do eixo $\tilde{x} \Rightarrow$ novo ref $\tilde{\Sigma}'$ com coords $(\tilde{x}'=\tilde{x}, \tilde{y}', \tilde{z}')$
- iii) " B " ψ " " " $\tilde{z}' \Rightarrow$ ref. Σ' com coords $(x', y', z'=\tilde{z}')$

Para ver que qq $A \in SO(3)$ pode ser decomposta dessa forma: notar que o eixo $\hat{z}$ pode ser deslocado p/ uma posição z' arbitrária na esfera por meio de uma rot. ao redor de algum eixo no equador. As 2 primeiras rotações realizam esse deslocamento (a 1ª determina o (semi) grº círculo de z' , a 2ª o ponto específico sobre ele. Já a 3ª orienta os eixos x', y' .



Fica claro tb que o domínio dos ângulos ϕ, ψ é $[0, 2\pi]$, mas que θ pode ser restrito a $[0, \pi]$

A rotação total A pode então ser escrita como a composição $A = BCD$,

onde $D = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & \cos \theta & \sin \theta \\ & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \\ & & 1 \end{bmatrix}$

(notar orientação y-z)
igual à x-y)

(n' von copiar a matriz inteira, está na p. 93)

$$A_c = \begin{pmatrix} * & * & \sin \psi \sin \theta \\ * & * & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$